

УДК 535.42+537.86.22

## ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЕ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕКТОРНЫХ ГАУССОВОПОДОБНЫХ ПУЧКОВ. I. ОДНОРОДНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

С.С. Гиргель

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

## POLARIZING AND POWER PROPERTIES OF VECTOR GAUSSIAN-LIKE BEAMS. I. THE HOMOGENEOUS POLARISATION

S.S. Girdel

F. Scorina Gomel State University

Найдены общие выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных гауссовоподобных пучков с однородной поляризацией. Эти результаты конкретизированы для стандартных пучков Эрмита – Гаусса. Установлено, что потоки энергии световых пучков Эрмита – Гаусса разделяются на отдельные независимые области (домены). Внутри каждой области потоки энергии автономны и не переходят в другие области.

**Ключевые слова:** параксиальные пучки, векторные пучки, гауссовоподобные пучки, поляризационные свойства, энергетические свойства, поляризация.

The general expressions for the energy flux density of an electromagnetic field  $\mathbf{S}$  vector Gaussian-like beams with homogeneous polarization are found. These results for the standard Hermite – Gauss beams are concretized. It is established that energy flows of light beams of Hermite – Gauss are divided into certain independent areas (domains). In each area energy flows are autonomous and into other areas do not pass.

**Keywords:** paraxial beams, vector beams, gaussian-like beams, polarizing properties, power properties, polarization.

## Введение

В параксиальных световых пучках продольная компонента поля значительно меньше поперечных компонент. Поэтому параксиальные пучки описываются обычно одной поперечной компонентой поля. Такие пучки называются скалярными. Чаще всего параксиальные световые пучки описываются как скалярные, что в большинстве случаев вполне достаточно. Такой заведомо упрощенный подход часто используется при описании свойств световых пучков [1]–[7]. Однако для пучков, у которых угол расходимости велик, скалярного приближения не достаточно. Более того, даже для параксиальных световых пучков, у которых поляризация неоднородна по сечению, необходимо использовать более строгий векторный формализм. Ясно, что более точным является описание лазерных световых пучков как трехмерных векторных полей. Однако векторные пучки изучены гораздо слабее, см., например, [8]–[15].

В работе предлагается формализм для описания поляризационных и энергетических характеристик векторных гауссовоподобных световых пучков. Затем этот формализм конкретизируется для векторных стандартных пучков Эрмита – Гаусса (sH-G). Исследуются свойства плотности потока энергии электромагнитного поля для вышеупомянутых пучков.

## 1 Поляризационные и энергетические свойства векторных световых пучков с однородной поляризацией

В работе [10] нами был предложен формализм и найдены выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $\mathbf{S}$  векторных параксиальных пучков с однородной поляризацией. В настоящей работе этот формализм будет распространен на векторные гауссовоподобные пучки с однородной поляризацией.

Пусть световой пучок имеет однородную поляризацию по всему поперечному сечению пучка. Тогда из векторной амплитуды  $\mathbf{E}_\perp$  можно выделить постоянный векторный множитель  $\mathbf{e}_\perp$ , отвечающий за поляризацию волны

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{e}_\perp F, \quad (1.1)$$

где функция  $F$  является некоторым решением параксиального параболического уравнения

$$(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z)F = 0 \quad (1.2)$$

а комплексный постоянный вектор поляризации  $\mathbf{e}_\perp$  не зависит от координат  $(x, y)$ . Такие пучки обладают поляризацией, однородной по сечению пучка, и чаще всего используются. Трехмерные векторы электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей пучка с однородной поляризацией имеют вид [10]:

$$\mathbf{E} = \left( \mathbf{e}_\perp + \frac{i}{k} \nabla_\perp \mathbf{e}_\perp \cdot \mathbf{e}_z \right) F, \\ \mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{n} \left( [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp] + \frac{i}{k} \nabla_\perp [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\perp] \cdot \mathbf{e}_z \right) F. \quad (1.3)$$

Здесь и далее  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор в направлении оси  $z$  пучка,  $n$  – показатель преломления среды,  $\nabla_{\perp} = \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y$  – поперечный Лапласиан;  $k_0 = \omega / c$ ,  $n^2 = \varepsilon \mu$ ,  $k = k_0 n$ .

Для вычисления характеристик поляризации пучка можно разложить нормированный ( $|\mathbf{e}_{\perp}|^2 = 1$ ) вектор поляризации  $\mathbf{e}_{\perp}$  по декартовому базису  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , как

$$\mathbf{e}_{\perp} = \frac{\eta_x \mathbf{e}_x + \eta_y \mathbf{e}_y}{\sqrt{|\eta_x|^2 + |\eta_y|^2}}.$$

Здесь  $\eta_x$  и  $\eta_y$  – некоторые постоянные комплексные параметры, не зависящие от координат  $(x, y)$ . Тогда азимут  $\psi'$  и эллиптичность  $\gamma = \text{th } 2\psi''$  эллиптически поляризованных мод (1.3) в их поперечном сечении можно выразить через комплексный параметр  $\eta = \eta_y / \eta_x$  по формулам [9], [16]:

$$\text{tg } 2\psi' = \frac{2\text{Re}\eta}{1 - |\eta|^2}; \quad \text{th } 2\psi'' = \frac{2\text{Im}\eta}{1 + |\eta|^2}. \quad (1.4)$$

Плотности потока энергии  $w$ , продольного  $\mathbf{S}_{\parallel} = \mathbf{e}_z S_z$  и поперечного  $\mathbf{S}_{\perp}$  потоков энергии электромагнитного поля однородно поляризованных пучков соответственно равны [10]:

$$w = \frac{\varepsilon |F|^2}{8\pi}; \quad S_z = \frac{c}{n} w; \quad (1.5)$$

$$\mathbf{S}_{\perp} = \frac{c\varepsilon}{8\pi nk} \left( \text{Im} \left( F^* \nabla_{\perp} F \right) + \text{th } 2\psi'' [\nabla_{\perp}, \mathbf{e}_z] |F|^2 / 2 \right).$$

## 2 Поляризационные и энергетические свойства векторных гауссовоподобных световых пучков с однородной поляризацией

Будем называть гауссовоподобным пучок, у которого амплитуда аподизирована гауссианом [12]

$$G = \frac{1}{q} \exp \left( \frac{ik\rho^2}{2q} \right) \quad (2.1)$$

для того, чтобы пучок переносил конечную мощность. Тогда комплексную амплитуду гауссовоподобного пучка можно представить в форме

$$F = Gh. \quad (2.2)$$

В итоге трехмерные векторы электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей гауссовоподобного пучка с однородной поляризацией имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= G \left( \mathbf{e}_{\perp} + \left( \frac{i\mathbf{e}_{\perp} \nabla_{\perp}}{k} - \frac{\mathbf{e}_z \mathbf{r}_{\perp}}{k} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right) h, \\ \mathbf{H} &= \frac{\varepsilon}{n} G \left( [\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_{\perp}] - \frac{i}{k} \left[ \frac{\mathbf{r}_{\perp}}{q} - \frac{i\nabla_{\perp}}{k}, \mathbf{e}_z \right] \right) h. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Энергетические характеристики гауссовоподобных пучков:

$$w = \frac{\varepsilon}{8\pi} |Gh|^2, \quad S_z = \frac{c}{n} w = \frac{c\varepsilon}{8\pi} |Gh|^2.$$

Общая плотность потока энергии  $\mathbf{S}$  для векторных однородно поляризованных гауссовоподобных мод:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{n} w \left\{ \mathbf{e}_z + \text{th } 2\psi'' \left( \frac{[\nabla_{\perp}, \mathbf{e}_z] \cdot |h|^2}{2k|h|^2} + \frac{q_0'' \rho \mathbf{e}_{\varphi}}{|q|^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{z \mathbf{r}_{\perp}}{|q|^2} + \frac{\text{Im}(\psi^* \cdot \nabla_{\perp} h)}{k|h|^2} \right) \right\} \equiv \mathbf{S}_{\parallel} + \mathbf{S}_s + \mathbf{S}_o. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь мы преобразовали  $\mathbf{S}_{\perp}$  и выделили явно слагаемые, ответственные за плотность орбитального  $\mathbf{S}_o$  и спинового  $\mathbf{S}_s$  потоков энергии, следуя Бекшаеву [17], [18] и Берри [19].

## 3 Плотность потока энергии стандартных пучков Эрмита – Гаусса

В качестве примера конкретизируем общие выражения (2.4) для векторных sH-G пучков. Целесообразно перейти к безразмерным переменным [20]

$$X = \frac{x}{x_0}, \quad Y = \frac{y}{y_0}, \quad Z = \frac{z}{z_0}. \quad (3.1)$$

Здесь  $x_0$  и  $z_0 = kx_0^2/2$  – некоторые характерные вещественные размеры пучка в направлениях, параллельных осям  $OX$  и  $OY$  соответственно. В безразмерных величинах гауссиан

$$G = \frac{1}{Q} \exp \left( \frac{iR^2}{Q} \right),$$

где  $R^2 = X^2 + Y^2$ .  $(X, Y, Z)$  – нормированные координаты. Безразмерный параметр пучка  $Q = q/z_0$ ;  $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{R}_{\perp} x_0$ .

Расходимость пучка определяется, как известно, в значительной степени расходимостью гауссиана [1], [2]. Полуугол расходимости гауссова пучка  $\theta_p = \frac{\lambda}{\pi w_0}$ , где минимальный радиус

пучка в перетяжке  $w_0 = \sqrt{q_0'' \lambda / \pi}$ . Коэффициент параксиальности (отношение поперечного масштаба  $x_0$  к продольному  $z_0$ )  $\theta = \frac{x_0}{z_0} = \theta_p \frac{w_0}{z_0}$  по

порядку величины сравнимо с расходимостью гауссиана  $\theta$ . Поэтому коэффициент параксиальности  $\theta$  равен  $\theta_p$  при  $x_0 = w_0$ . Но, в общем случае, например, после прохождения пучка через линейную оптическую систему радиус пучка  $w_0$  изменяется, и тогда  $x_0 \neq w_0$ .

Комплексная скалярная амплитуда sH-G пучка  $F = Gh = GH_m H_n \exp(-i(m+n)\Phi_0)$  (3.2)

выражается через полиномы Эрмита

$$H_m \equiv H_m(b^* X); \quad H_n \equiv H_n(b^* Y); \quad (3.3)$$

где  $b = \sqrt{\frac{2}{1+Z^2}}$ .

Подставляя (3.2) и (3.3) в (2.4) находим общую плотность потока энергии для векторных sH-G пучков в безразмерной форме:

$$\mathbf{S} = S_z \left\{ \mathbf{e}_z + \frac{\theta Z \operatorname{Re} \mathbf{e}_p}{1 + Z^2} + \operatorname{th} 2\psi'' \frac{\theta}{1 + Z^2} \times \right. \\ \left. \times \left( \operatorname{Re} \mathbf{e}_\varphi + \sqrt{2(1 + Z^2)} \cdot \left( \mathbf{e}_x \frac{nH_{n-1}}{H_n} - \mathbf{e}_y \frac{mH_{m-1}}{H_m} \right) \right) \right\} \equiv (3.4) \\ \equiv \mathbf{S}_\parallel + \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_s.$$

Здесь плотность продольного потока энергии  $S_z = \frac{c\varepsilon}{8\pi l} |GH_m H_n|^2$ , а  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$  и  $(\mathbf{e}_p, \mathbf{e}_\varphi)$  – базисные векторы декартовой и цилиндрической систем координат соответственно.

Характерные закономерности поперечных потоков энергии представлены на рисунках 3.1 и 3.2.

Проведенные аналитические выкладки и графическое моделирование приводят к следующим выводам:

1. Плотность поперечного потока энергии значительно меньше продольного (вдоль оси пучка) потока, поэтому их отношение

$$|\mathbf{S}_\perp|/|\mathbf{S}_z| \propto w_0/z_0$$

равно по порядку величины расходимости пучка  $\theta_p$ .

2. Плотность поперечного потока энергии электромагнитного поля пучка  $\mathbf{S}_\perp$  можно разделить на спиновую  $\mathbf{S}_s$ , зависящую от поляризации часть и на орбитальную  $\mathbf{S}_o$  часть, зависящую только от пространственной конфигурации пучка. Орбитальный поток  $\mathbf{S}_o$  для sH-G пучков направлен строго радиально. Однако спиновый поток энергии, зависящий от коэффициента поляризации  $t \equiv \operatorname{th} 2\psi''$ , имеет как азимутальную, так и радиальную компоненты.

3. При увеличении расстояния  $\rho$  от оси пучка радиальные потоки энергии  $\mathbf{S}_p$  уменьшаются медленнее, чем азимутальные  $\mathbf{S}_\varphi$  и поэтому постепенно радиальные потоки становятся преобладающими по сравнению с азимутальными (см. рисунок 3.2 (a)).

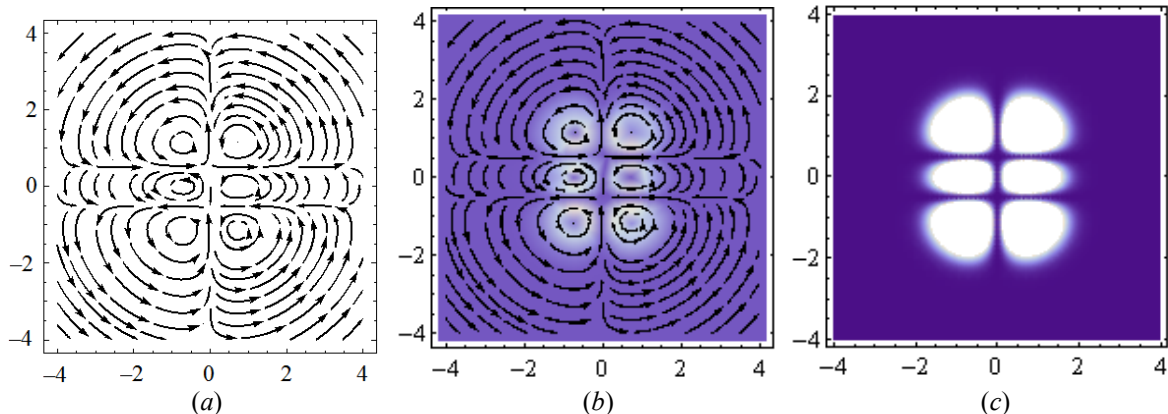


Рисунок 3.1 – (a) линии плотности  $\mathbf{S}_\perp$  потока энергии; (b) линии плотности  $\mathbf{S}_\perp$  потока энергии вместе с его интенсивностью; (c) полная интенсивность пучка. Общие параметры sH-G пучка:  $m = 1$ ;  $n = 2$ ;  $t = 1$ ;  $Z = 0$

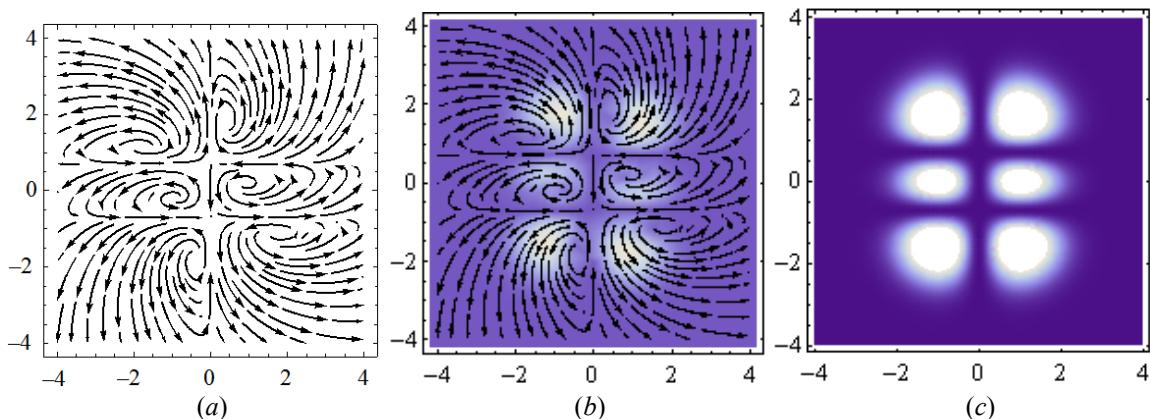


Рисунок 3.2 – (a) линии плотности  $\mathbf{S}_\perp$  потока энергии; (b) линии плотности  $\mathbf{S}_\perp$  потока энергии вместе с его интенсивностью; (c) полная интенсивность пучка. Общие параметры sH-G пучка:  $m = 1$ ;  $n = 2$ ;  $t = 1$ ;  $Z = 1$

4. При линейной поляризации пучка (тогда  $t = 0$ ) азимутальный поток энергии строго равен нулю, а линии потока энергии представляют собой вытянутые гиперболы вокруг оси пучка  $z$ .

5. С увеличением степени поляризации  $t$  линии поперечных потоков энергии постепенно закручиваются. С возрастанием  $\rho$  или  $z$  эти линии постепенно раскручиваются.

6. С увеличением расстояния  $z$  от перетяжки пучка световое пятно увеличивается, как для кругового гауссова пучка. Световое пятно интенсивности в поперечном сечении пучка разделено на отдельные области (домены) темными линиями, в которых интенсивность обращается в нуль. Число доменов равно  $N = m \times n$ , где  $m$  и  $n$  – индексы полиномов Эрмита.

7. Темные линии описываются прямыми

$$x = c_m, \quad y = c_n,$$

где  $c_m$  и  $c_n$  – корни полиномов Эрмита  $H_m$  и  $H_n$  соответственно. Число прямых равно произведению индексов  $mn$ . В трехмерном пространстве этим линиям соответствуют цилиндрические поверхности с нулевой интенсивностью, вытянутые вдоль оси  $OX$  или  $OY$ . Эти поверхности разделяют пучок на области. Внутри каждой области потоки энергии автономны и не переходят в другие области.

8. На рисунках 3.1 и 3.2 ( $a$  и  $b$ ) изображены графики линий поперечного потока энергии и его интенсивности. По интенсивности поток делится на несколько пятен, их число равно

$$N = (m+1) \times (n+1),$$

как и для пятен продольного потока. Однако расположение этих пятен и их форма только частично соответствуют пятнам продольного потока, что наглядно видно на рисунках 3.1 и 3.2.

9. В поперечной плоскости линии поперечного потока энергии представляют вихревые кривые (энергетические вихри). В центрах этих энергетических вихрей  $S_{\perp} = 0$  и остается только продольный поток энергии. Число вихрей равно числу пятен. Интересно, что при переходе через поверхности нулевой интенсивности направления вращения вихрей изменяются на противоположные.

10. Картина поперечных потоков энергии обладает точечной группой симметрии  $2_z m'_x m'_y$ , т.е. осью симметрии 2-го порядка и плоскостями симметрии  $m'_x$  и  $m'_y$ . Штрихи при плоскостях симметрии  $m'_x$  и  $m'_y$  означают, что при отражениях также изменяются направления движения потоков энергии на противоположные.

11. Возвращаясь к общей картине, можно сказать, что линии полного потока энергии представляют собой пространственные кривые, имеющие небольшое кручение.

## Заключение

Найдены простые выражения для плотности потока энергии электромагнитного поля  $S$  векторных гауссовоподобных пучков с однородной поляризацией. Найденные общие выражения могут непосредственно быть применены для других типов векторных гауссовоподобных пучков, например, для пучков Бесселя – Гаусса, Лагерра – Гаусса, Куммера – Гаусса.

В разделе 3 общие результаты конкретизированы для sH-G пучков. Установлено, что потоки энергии световых sH-G пучков разделяются на отдельные независимые области (домены). Существенно, что внутри каждой области потоки энергии автономны и не переходят в другие области.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ананьев, Ю.А.* Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М.: Наука, 1990.
2. *Гончаренко, А.М.* Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 144 с.
3. *Ардашев, А.Ю.* Некоторые свойства узкого монохроматического светового пучка / А.Ю. Ардашев, В.А. Кашин, Г.В. Скроцкий // Известия вузов. Радиофизика. – 1968. – Т. 11, № 12. – С. 1848–1851.
4. *Davis, L.W.* TM and TE electromagnetic beams in free space / L.W. Davis, G. Patsakos // Optics Letters. – 1981. – Vol. 8, № 1. – P. 22–23.
5. *Хаус, Х.* Волны и поля в оптоэлектронике / Х. Хаус. – М.: Мир, 1988. – 432 с.
6. *Shimoda, Koichi.* Vectorial analysis of the Gaussian beams of light / Koichi Shimoda // J. Phys. Soc. Japan. – 1991. – Vol. 60, № 1. – P. 141–144.
7. *Вайнштейн, Л.А.* Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
8. *Seshadri, S.R.* Electromagnetic Gaussian beam / S.R. Seshadri // J. Opt. Soc. Am. A. – 1987. – Vol. 15, № 22. – P. 2712–2719.
9. *Борн, М.* Основы оптики / М. Борн, Е. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 587 с.
10. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1 (6). – С. 20–24.
11. *Гиргель, С.С.* Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1 (10). – С. 11–14.
12. *Гиргель, С.С.* Поляризационные и энергетические свойства векторных параксиальных гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 3 (12). – С. 19–24.
13. *Гиргель, С.С.* Поляризационные свойства бессель-гауссовых пучков света / С.С. Гиргель

// Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6 (9). – С. 149–154.

14. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства векторных бessel-гауссовых световых пучков / С.С. Гиргель // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6 (39), Ч. 2. – С. 15–18.

15. Bandres, Miguel A. Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams / Miguel A. Bandres, Julio C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, № 16. – P. 2155–2057.

16. Федоров, Ф.И. Оптика анизотропных сред / Ф.И. Федоров. – Мн.: Изд-во АН БССР, 1976. – 380 с.

17. Bekshaev, A.Y. Transverse energy flows in vectorial fields of paraxial beams with singularities /

A.Y. Bekshaev, M.S. Soskin // Opt. Commun. – 2007. – Vol. 271. – P. 332–348.

18. Bekshaev, A. Internal flows and energy circulation in light beams // A. Bekshaev, K. Bliokh, M. Soskin / Journ. of Optics. – 2011. – Vol. 13, № 5. – 053001 (32 pp.).

19. Berry, M.V. Optical currents / M.V. Berry // Journ. of Optics. – A: Pure Appl. Opt. – 2009. – Vol. 11, № 9. – 094001 (12 pp.).

20. Гиргель, С.С. Скалярные астигматические 3D световые пучки Куммера–Гаусса / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 1 (13). – С. 11–16.

Поступила в редакцию 22.01.16.